

## SYSTEMATIC LITERATURE REVIEW: KESALAHAN PADA PEMBUKTIAN MATEMATIS

**Ayu Pitaloka Saragi<sup>1</sup>, Rusi Ulfa Hasanah<sup>2</sup>, Sri Damayani<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, UIN Sumatera Utara

Email: [ayupitaloka0305213043@uinsu.ac.id](mailto:ayupitaloka0305213043@uinsu.ac.id)

<sup>2</sup>Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, UIN Sumatera Utara

Email: [rusiulfahasanah@uinsu.ac.id](mailto:rusiulfahasanah@uinsu.ac.id)

<sup>3</sup>Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, UIN Sumatera Utara

Email: [sri0305213066@uinsu.ac.id](mailto:sri0305213066@uinsu.ac.id)

### ABSTRAK

*Kajian literatur tentang kesalahan pembuktian matematis. Penelitian ini mencoba untuk mengkaji penelitian kualitatif yang dilakukan antara tahun 2019 hingga 2024 mengenai kesalahan dalam pembuktian matematis. Metode penelitian ini menggunakan metode Systematic Literature Review (SLR). Hasil penelitian mengungkapkan adanya penurunan artikel yang membahas kesalahan dalam pembuktian matematis pada tahun 2020, namun mengalami peningkatan pada tahun 2019 dan 2022, serta melibatkan berbagai jenjang pendidikan mulai dari SMP hingga mahasiswa. Studi literatur menunjukkan mahasiswa dan siswa masih melakukan kesalahan dalam pembuktian matematis, dengan artikel terkait kesalahan tersebut dipublikasikan dari S2 sampai S4. Materi penelitian terkait kesalahan dalam pembuktian matematis didominasi oleh materi bilangan bulat dengan jenis kesalahan pembuktian termasuk kesalahan dengan teori Newman dan kategori Watson. Solusi yang disarankan untuk mengurangi kesalahan dalam pembuktian matematis adalah dengan banyak latihan dan pemahaman konsep pembuktian.*

*Kata Kunci: Kesalahan; Pembuktian matematis; Studi literatur*

### ABSTRACT

*overview of the literature on mathematical proof mistakes. The purpose of this study is to examine qualitative research conducted between 2019 and 2024 on mistakes in mathematical proof. The Systematic Literature Review (SLR) method is employed in this study. The study's findings showed that papers addressing mistakes in mathematical proof decreased in 2020 but climbed in 2019 and 2022. The articles covered students at different educational levels, ranging from junior high school to universities. Literature studies show that students and pupils still make mistakes in mathematical proofs, with articles related to these mistakes being published from S2 to S4. Research material related to errors in mathematical proof is dominated by integer material with types of proof errors including errors with Newman theory and Watson categories. The recommended solution to reduce errors in mathematical proof is to practice a lot and understand the concept of proof.*

*Keywords: error; mathematical proof; study of literature*

## **PENDAHULUAN**

Selain dapat menyelesaikan kesulitan, matematika dapat digunakan untuk memecahkan teka-teki dan memunculkan ide-ide baru dengan menggunakan penalaran, imajinasi, dan intuisi (Khan & Krell, 2019). Serangkaian argumen yang berfungsi untuk menetapkan secara rasional validitas suatu pandangan, ide, atau pendirian tertentu dan untuk memperkuatnya dikenal sebagai pembuktian matematis (Susanto, 2011). Klaim ini juga mendukung klaim Hendana dan Lestari (2021) sebagian besar matematika didasarkan pada teori, premis, pernyataan, dan definisi yang telah dibuktikan kebenarannya. Siswa yang mempelajari matematika dituntut untuk mampu menafsirkan suatu proposisi yang diberikan. Maya dan Sumarmo (dalam Noto dkk., 2019) menegaskan elemen kunci pendidikan matematika adalah kapasitas siswa untuk mendemonstrasikan pembelajarannya sendiri, yaitu keterampilan yang dikembangkan seiring berjalannya waktu. Meskipun demikian, kapasitas untuk secara konsisten mengobati penyakit jarang masih belum berubah dibandingkan sebelumnya. Menurut Köhce dkk. (2010), kemampuan siswa dalam matematika jauh dibawah apa yang diharapkan dari mereka. Lebih lanjut, Siallagan dkk. (2021) melaporkan siswa juga menghadapi masalah serupa ketika harus membuktikan matematika.

Saat belajar matematika, setiap soal itu sulit. Tentu saja, permasalahan matematika yang berhubungan dengan pembuktian menghadi rkan kesulitan terbesar. Temuan penelitian sebelumnya telah menunjukkan sejumlah kesalahan yang dapat terjadi ketika membuktikan suatu pernyataan matematis, termasuk penerapan prosedur pembuktian yang salah, kesalahan dalam proses aljabar, dan kesalahpahaman dimana harus memulai tahap pembuktian. Namun hal ini juga mengatasi kesalahan yang dapat terjadi dalam induksi matematika, pembuktian dengan kontradi ksi, dan pembuktian langsung pada saat yang bersamaan.

Penelitian mengenai berbagai macam kesalahan pembuktian matematis sudah banyak dilakukan, antara lain penelitian Hadi yanto (2024), Nur Fauziah (2024), dan lain-lain. Selain itu, pemeriksaan yang lebih menyeluruh terhadap berbagai jenis masalah penelitian matematika diperlukan untuk mengumpulkan data yang relevan dan informasi yang menyeluruh dan dapat diandalkan. Selain itu, penelitian sebelumnya mengenai jenis-jenis kesalahan yang dilakukan Resky Agung Herutoma (2022) dalam Systematic Literature Review (SLR) juga menunjukkan perlunya kajian lebih lanjut mengenai pembuktian matematis. Para peneliti sangat cocok untuk melakukan penelitian Systematic Literature Review (SLR) dengan pemikiran ini. SLR adalah seperangkat prosedur atau metodologi penelitian yang digunakan untuk mempersempit dan menilai penelitian pada subjek tertentu (Lusiana & Suryani, 2014; Triandini et al., 2019). Untuk menjawab pertanyaan penelitian yang telah dikemukakan sebelumnya, penelitian semacam ini dilakukan untuk mencari, mendeskripsikan, dan menilai data yang berkaitan dengan permasalahan penelitian saat ini (Iskandar & Juandi, 2022; Lusiana & Suryani, 2014; Triandini et al., 2019). SLR juga dapat berkontribusi pada pemahaman yang lebih baik dan pemeliharaan tren penelitian (Lame, 2019). Lusiana dan Suryani (2014) mengusulkan SLR dapat berfungsi sebagai landasan teoritis untuk upaya penelitian, berfungsi sebagai alat, sumber, atau pendekatan untuk memahami upaya penelitian sebelumnya untuk menjawab pertanyaan penelitian yang menarik. Tujuan penelitian ini adalah untuk melakukan tinjauan sistematik terhadap literatur terhadap berbagai macam kesalahan yang terjadi pada pembuktian matematis. Untuk mencapai tujuan ini, kami akan mempertimbangkan sejumlah faktor, termasuk tahun penerbitan, latar belakang pendidikan penulis, indeks jurnal, bahan penelitian, dan temuan penelitian sebelumnya mengenai subjek tersebut.

## **METODE PENELITIAN**

### ***Systematic literature review***

Penelitian ini menggunakan metodologi deskriptif kualitatif yang dipadukan dengan metode SLR (Systematic Literature Review). Metode Systematic Literature Review, atau SLR, digunakan untuk menemukan, menganalisis, menilai, dan menafsirkan semua penelitian yang ada serta subjek yang relevan dengan pekerjaan yang sedang dilakukan saat ini (E Triandini, 2019). Penelitian Tinjauan Pustaka Sistematis (SLR) bertujuan untuk melakukan pembenaran terhadap kelemahan pembuktian matematis dengan mengacu pada penelitian sebelumnya. Selama tahap pengumpulan data, peneliti menggunakan teknik pencarian dan mengumpulkan artikel penelitian sebelumnya yang dipublikasikan didatabase Google Cendekia. Setelah mengekstraksi atau merangkum setiap artikel, hanya artikel yang memenuhi kriteria inklusi yang melanjutkan ke tahap analisis.

### ***Kriteria Inklusi***

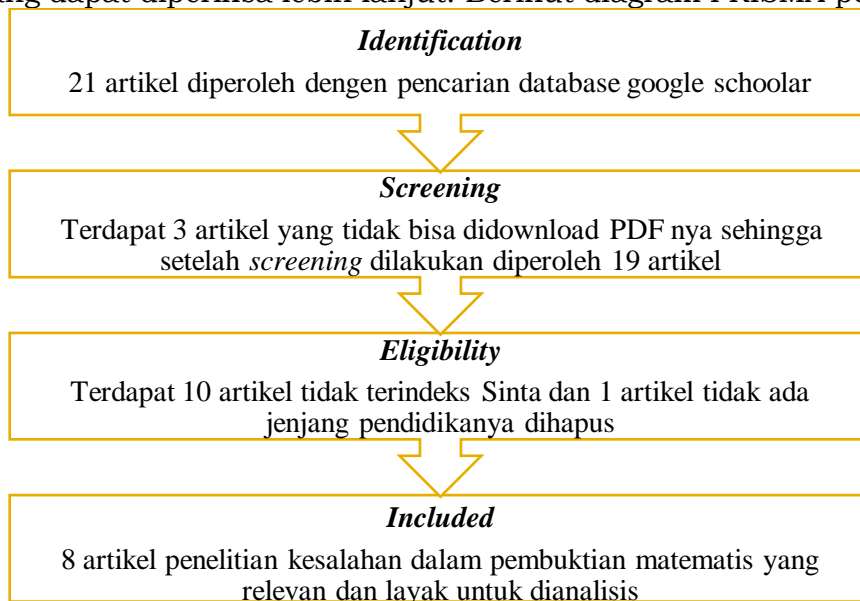
Terdapat 5 kriteria inklusi yang dirumuskan peneliti agar data yang diperoleh relevan dengan tujuan penelitian yaitu: (1) Artikel yang membahas kesalahan dalam pembuktian matematis (2) Artikel yang terbit di jurnal terindeks Sinta (4) Artikel memuat jenjang Pendidikan (5) Artikel yang mencantumkan materi pembelajaran. Artikel tidak dapat masuk ke tahap studi literatur sistematis jika tidak memenuhi kriteria inklusi.

### ***Instrumen Penelitian***

Pendekatan yang terkait dengan kriteria inklusi berfungsi sebagai instrumen penelitian. Kriteria-kriteria tersebut berdasarkan kesalahan dalam pembuktian matematis, tahun terbit, jenjang pendidikan, materi pelajaran. PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic Review and Meta-Analyzes) adalah metodologi yang digunakan dalam SLR (Systematic Literature Review) ini. PRISMA menggunakan empat tahapan dalam seleksi artikel: identifikasi, penyaringan, kelayakan, dan inklusi (Liberati, 2009).

### ***Populasi dan Sampel***

Populasi penelitian ini terdiri dari seluruh artikel dari database Google Scholar tentang kesalahan argumen matematika. Dua puluh publikasi diambil sebagai sampel berdasarkan pencarian menggunakan kata kunci mesin pencari; hanya sembilan penelitian yang dapat diperiksa lebih lanjut. Berikut diagram PRISMA penelitian ini:



**Gambar 1. Diagram PRISMA Studi Kesalahan dalam Pembuktian Matematis**

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Temuan penelitian ini mencakup pemeriksaan dan sinopsis dari karya-karya yang diterbitkan sebelumnya mengenai kelemahan bukti matematis. Setelah penerapan inklusi dan perolehan artikel terkait, artikel-artikel tersebut mengalami kategorisasi tambahan sesuai dengan atribut penelitian. Ciri kajian penelitian meliputi indeks jurnal, tahun penerbitan, tingkat pendidikan, dan bahan yang digunakan. Tabel 1 akan memperlihatkan variasi penelitian tentang kesalahan dalam pembuktian matematis tergantung pada karakteristik penelitian.

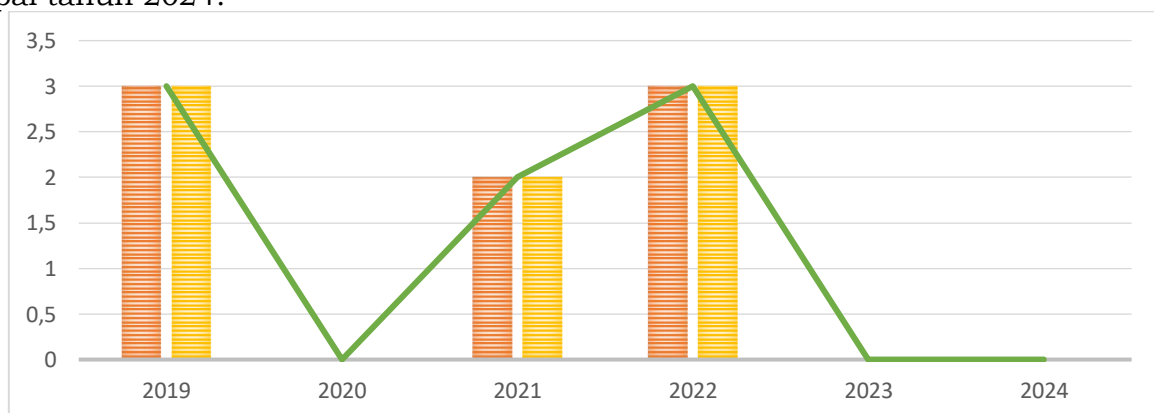
Studi karakteristik	Kriteria	Frekuensi
Tahun Publikasi	2019	3
	2020	-
	2021	2
	2022	3
	2023	-
	2024	-
Jenjang Pendidikan	SMP	1
	SMA	-
	Mahasiswa	7
Indeks Jurnal	SI	-
	S2	1
	S3	2
	S4	5
	S5	-
	S6	-
Materi Penelitian	Bilangan Bulat	3
	Transformasi Geometri	1
	Identitas Trigonometri	2
	Aljabar	1
	Lingkaran	1

**Tabel 1. Variasi Penelitian**

Selanjutnya akan dideskripsikan tiap-tiap studi berdasarkan pada kriteria yang sebelumnya ditetapkan.

### **Tahun Publikasi**

Artikel yang menjadi sampel dalam penelitian ini dipublikasikan mulai tahun 2019 sampai 2024. Berikut diagram sebaran studi primer mulai tahun 2019 sampai tahun 2024.

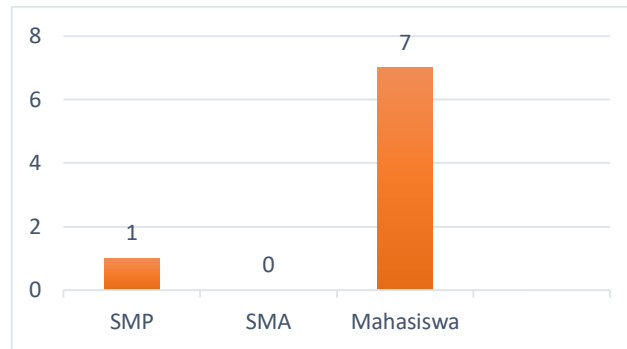


**Gambar 2. Data Penelitian Kesalahan dalam pembuktian matematis berdasarkan tahun publikasi**

Dari Gambar 2. didapatkan kesimpulan frekuensi studi terkait kesalahan dalam pembuktian matematis yang dipublikasikan dari tahun 2019 sampai 2024 relatif mengalami penurunan pada tahun 2020 tidak ada artikel yang membahas kesalahan dalam pembuktian matematis dilanjut pada tahun 2023 dan 2024 juga tidak ada artikel yang membahas kesalahan dalam pembuktian matematis. Studi dengan pendekatan kualitatif terkait kesalahan dalam pembuktian matematis paling banyak dipublikasikan pada tahun 2019 dan 2022 yaitu sebanyak 3 artikel.

### **Jenjang Pendidikan**

Studi terkait Kesalahan dalam pembuktian matematis yang dijadi kan data dalam penelitian ini dilakukan dari jenjang SMP sampai Mahasiswa dengan rincian sebaran pada Gambar 3.

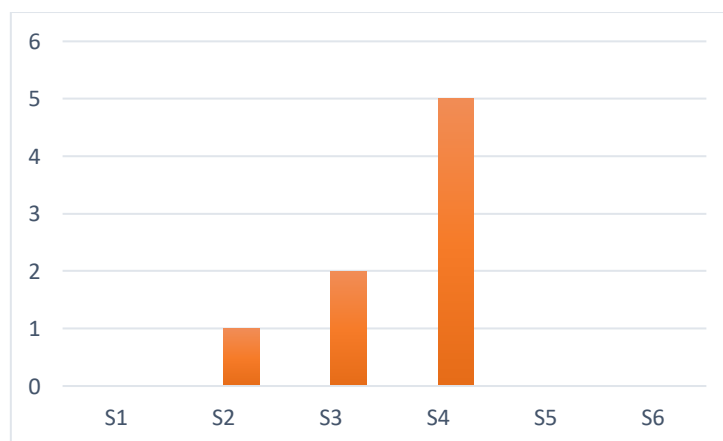


Gambar 3. Data Penelitian Kesalahan dalam pembuktian matematis berdasarkan jenjang pendidikan

Dari Gambar 3. didapat kesimpulan frekuensi jenjang pendidikan terkait kesalahan dalam pembuktian matematis yang dipublikasikan dari jenjang SMP sampai mahasiswa relatif mengalami peningkatan pada tahun 2019 dan tahun 2022. Tetapi pada tahun 2021 mengalami penurunan. Keseluruhan artikel membahas kesalahan dalam pembuktian matematis, dan artikel yang paling banyak dipublikasikan pada tahun 2019 dan tahun 22 yaitu sebanyak 3 artikel

### **Indeks Jurnal**

Rincian sebaran artikel terkait kesalahan dalam pembuktian matematis dengan pendekatan kualitatif berdasarkan indeks jurnal disajikan pada Gambar 4 berikut ini



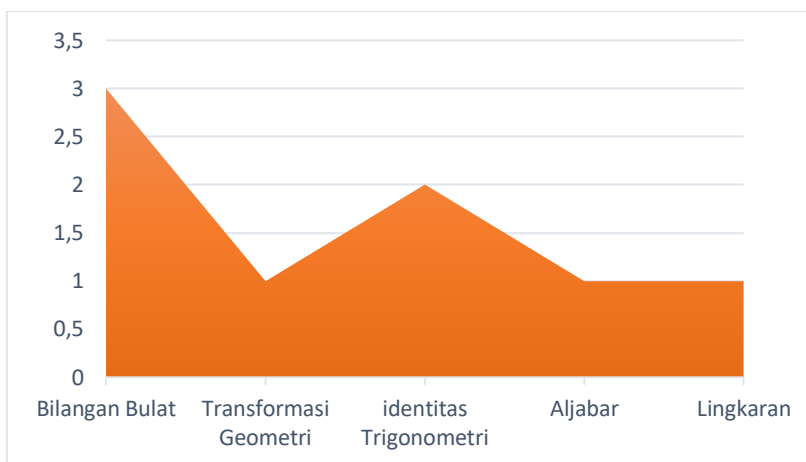
**Gambar 4. Data Penelitian Kesalahan dalam pembuktian matematis berdasarkan jenjang pendidikan**

Dari Gambar 4. dapat diketahui hasil studi terkait kesalahan dalam pembuktian matematis yang dipublikasikan dari S2 sampai S4 relatif mengalami peningkatan. Sementara untuk jurnal terindeks S1 dan S5 belum ada. Keseluruhan artikel membahas

dalam pembuktian matematis, dan artikel yang paling banyak dipublikasikan pada S4 yaitu sebanyak 5 artikel.

**Materi Penelitian**

Berdasarkan materi penelitian, studi literatur ini dibagi menjadi 5 yaitu bilangan bulat, transformasi geometri, identitas trigonometri, aljabar, dan lingkaran. Rincian sebaran studi berdasarkan materi penelitian disajikan pada Gambar 5.



**Gambar 5. Data Penelitian Kesalahan dalam pembuktian matematis berdasarkan materi penelitian**

Dari Gambar 5, dapat disimpulkan penelitian terkait kesalahan dalam pembuktian matematis didominasi dengan materi bilangan bulat sebesar 3 artikel. Sedangkan untuk materi tentang transformasi geometri, aljabar, dan lingkaran paling sedikit dilakukan yaitu 1 artikel. Keseluruhan artikel membahas dalam pembuktian matematis.

Berdasarkan studi literatur yang sudah dilakukan, peneliti menemukan mahasiswa dan siswa masih melakukan kesalahan dalam pembuktian matematis (Herutomo, R. A, 2019; Yazidah, N. I., Sulistyorini, Y., & Kartika, E. D, 2022; Maifa, T. S, 2019; Handayani, U. F., Hakim, W., & Putri, A. O, 2022; Radi usman, R., & Simanjuntak, M, 2021; Arifin, S. A. N, 2021; Ningsih, N., Hariyani, S., & Fayeldi, T, 2019; Andriani, L, 2019) menyatakan ada banyak faktor penyebab terjadinya kesalahan dalam pembuktian diantaranya tidak memahami maksud soal, tidak memahami tujuan, tidak memahami aturan pembuktian, kurang memahami konsep rencana pembuktian sistematis. Solusi yang dapat dilakukan agar meminimalisis kesalahan dalam pembuktian matematis adalah harus banyak mengerjakan latihan jenis pembuktian, memahami Kembali sistematis pembuktian soal. Adapun jenis dari kesalahan pembuktian matematis yang diperoleh dari hasil penelitian Akan disajikan dalam tabel 2.

Jenis kesalahan	Frekuensi
Kesalahan dengan teori newman ( <i>Newman’s error analysis</i> ).	5
Kesalahan Kategori Watson	3

**Tabel 2. Kesalahan Pembuktian Matematis Dari Hasil Penelitian**

Terdapat 5 artikel yang membahas jenis kesalahan pembuktian matematis dengan teori newman dan 3 artikel yang membahas Pembuktian matematis dengan kategori Watson, dan beberapa penelitian melakukan modifikasi terhadap indikator untuk menyesuaikan dengan tujuan penelitian. Teori Newman dalam (Handayani, U. F., Hakim, W., & Putri, A. O, 2022) Adapun jenis kesalahan yang dimaksudkan yakni:

1. kesalahan membaca (*reading error*): Kesalahan membaca ini tidak hanya melibatkan pembacaan masalah tetapi juga pengenalan istilah-istilah simbolisnya atau kemampuan mengidentifikasi masalah itu sendiri.
2. kesalahan pemahaman (*reading comprehension*): Melakukan kesalahan setelah membaca dan tidak mampu mengidentifikasi permasalahan yang perlu diselesaikan disebut salah mengartikan suatu permasalahan.
3. kesalahan transformasi (*transfer error*): Kesalahan dalam transformasi masalah, khususnya dalam pembuktian, terjadi ketika strategi pembuktian yang dipilih atau ditentukan salah. kesalahan dalam desain bukti, ketidakmampuan memutuskan langkah mana yang harus diambil, dan penerapan rencana yang dipilih tidak lengkap.
4. Kesalahan Proses perhitungan (*process skill*): Kesalahan dalam proses mempraktekkan pembuktian konsep yang dipilih disebut kesalahan keterampilan proses. Mampu menjawab pertanyaan berdasarkan bukti, namun kurang teliti dalam mengartikulasikan klaim dan kurang akurat dalam menunjukkan dengan tepat pembenaran setiap klaim.
5. kesalahan penulisan jawaban (*encoding error*) Ketika menyusun tanggapan akhir, seseorang melakukan kesalahan dalam proses pemecahan masalah karena gagal mengidentifikasi penjelasan yang tepat untuk kesimpulan pembuktian.

Jenis kesalahan menurut Watson dalam (Andriani. L, 2019):

1. Data tidak tepat (*inappropriate data/id*). Dalam hal ini, siswa memilih informasi atau fakta yang tidak akurat meskipun mencoba mendekati subjek pada tingkat yang sesuai.
2. Prosedur tidak tepat (*inappropriate procedure/ip*). Dalam hal ini, siswa berusaha untuk mendekati suatu permasalahan pada tingkat yang tepat, namun ia menggunakan teknik atau strategi yang tidak tepat—misalnya, menerapkan rumus atau prinsip secara tidak tepat.
3. Data hilang (*omitted data/od*) Satu atau lebih titik data yang hilang dari balasan siswa merupakan tanda-tanda data yang hilang. Akibatnya, jawabannya tidak lagi akurat. Sekalipun siswa belum menemukan semua materi yang dibutuhkan, mereka tetap berupaya untuk tampil pada tingkat yang sesuai.
4. Kesimpulan hilang (*omitted conclusion/oc*). Salah satu tanda hilangnya kesimpulan adalah ketika siswa menunjukkan tingkat penalaran yang cukup tetapi kemudian gagal dalam menarik kesimpulan.
5. Konflik level respon (*response level conflict/rlc*). Konflik tingkat respons merupakan gejala hilangnya jawaban kesimpulan. Siswa dalam skenario ini menampilkan kompetisi operasi pada satu tingkat dan kemudian turun ke operasi yang lebih rendah untuk menarik kesimpulan.
6. Manipulasi tidak langsung (*undirected manipulation/um*). Siswa mencoba menggunakan semua fakta dalam jawaban dan memahami mereka harus bekerja pada tingkat tertentu. Pemikiran yang tidak logis atau acak dipadukan dengan penalaran yang lugas akan menghasilkan solusi yang tepat. Manifestasi ini dianggap sebagai kontrol tidak langsung.
7. Masalah hirarki keterampilan (*skill hierarchy problem/shp*). Memecahkan banyak masalah aritmatika melibatkan beberapa bakat. Kesulitan hirarki keterampilan antara lain menunjukkan ketidakmampuan siswa dalam memecahkan tantangan berasal dari kurangnya atau visibilitas keterampilan mereka.

## **SIMPULAN**

Penelitian ini membahas tentang kesalahan dalam pembuktian matematis dengan metode *Systematic Literature Review* (SLR) untuk menganalisis penelitian terdahulu terkait topik tersebut. Hasil penelitian menunjukkan adanya penurunan artikel yang membahas kesalahan dalam pembuktian matematis pada tahun 2020, namun mengalami

peningkatan pada tahun 2019 dan 2022, serta melibatkan berbagai jenjang pendidikan mulai dari SMP hingga mahasiswa. Studi literatur menunjukkan mahasiswa dan siswa masih melakukan kesalahan dalam pembuktian matematis, dengan artikel terkait kesalahan tersebut dipublikasikan dari S2 sampai S4. Materi penelitian terkait kesalahan dalam pembuktian matematis didominasi oleh materi bilangan bulat dengan jenis kesalahan pembuktian termasuk kesalahan dengan teori Newman dan kategori Watson. Solusi yang disarankan untuk mengurangi kesalahan dalam pembuktian matematis adalah dengan banyak latihan dan pemahaman konsep pembuktian.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- Andriani, L. (2019). Analisis Kesalahan Mahasiswa Dalam Meyelesaikan Soal Himpunan diProgram Studi Pendidikan Matematika UIN SUSKA RIAU. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(2), 550-562.
- Arifin, S. A. N. (2021). Analisis Jawaban Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Pembuktian Geometri Berdasarkan Teori Newman. *Edukatif: Jurnal Ilmu Pendidikan*, 3(4), 1395-1408.
- Dewi Niken Shofiana. (2023). *Sytematic Literature Review: Kemampuan Pembuktian Matematis*. *Jurnal Cendekia: Jurnal pendidikan Matematika*. 7(1), 240-254.
- Handayani, U. F., Hakim, W., & Putri, A. O. (2022). Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Pembuktian Identitas Trigonometri. *Journal Focus Action of Research Mathematic (Factor M)*, 4(2), 27-42.
- Herutomo, R. A. (2019). Kesalahan mahasiswa dalam pembuktian matematik. *Jurnal Didaktik Matematika*, 6(1), 53-67.
- Kumanireng, Lusya Bince. (2022). Problematika Pembuktian Matematis Mahasiswa Pada Geometri Transformasi DiInstitut Keguruan Dan Teknologi Larantuka. *Jurnal Penelitian fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan*. 7(1).
- Liberati, A., Altman, D. G., Tetzlaff, J., Mulrow, C., Gøtzsche, P. C., Ioannidis, J. P., ... & Moher, D. (2009). The PRISMA statement for reporting systematic reviews and meta-analyses of studi es that evaluate health care interventions: explanation and elaboration. *Annals of internal medicine*, 151(4), W-65.
- Maifa, T. S. (2019). Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Pembuktian Transformasi Geometri. *Jurnal Riset Pendidikan Dan Inovasi Pembelajaran Matematika (JRPIPM)*, 3(1), 8-14.
- Ningsih, N., Hariyani, S., & Fayeldi, T. (2019). Analisis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal lingkaran berdasarkan kategori watson. *UNION: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(2), 187-200.
- Radi usman, R., & Simanjuntak, M. (2021). Analisis Kesalahan Mahasiswa Calon Guru Sekolah Dasar dalam Menyelesaikan Soal Pembuktian Aljabar. *JNPM (Jurnal Nasional Pendidikan Matematika)*, 5(1), 149-159.
- Triandini, E., Jayanatha, S., Indrawan, A., Putra, G. W., & Iswara, B. (2019). Metode systematic literature review untuk identifikasi platform dan metode pengembangan sistem informasi diIndonesia. *Indonesian Journal of Information Systems*, 1(2), 63-77.
- Widiastuti, Anisa dkk (2023). Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Pembuktian Geometri Analitik Materi Segitiga. *Griya Journal of Mathematic Education and Appllication*. 3(3), 484-490
- Yazidah, N. I., Sulistyorini, Y., & Kartika, E. D. (2022). Analisis Kesalahan dalam Pembuktian Teorema Bilangan Bulat pada Mahasiswa IKIP Budi Utomo Malang. *Journal Focus Action of Research Mathematic (Factor M)*, 4(2), 17-26.